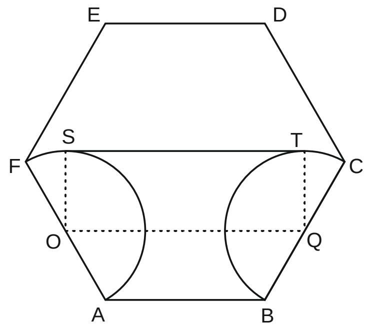
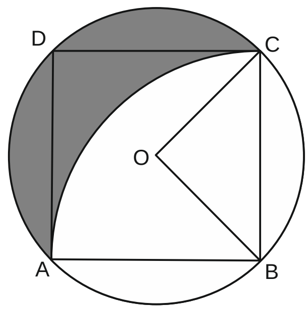
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (6/11/2023)

1. QUASI SENZA PAROLE [600]



Tracciando le due perpendicolari da S e T si finisce nel punto medio del lato, per le note proprietà della tangente alla circonferenza. Siano O e Q i centri dei lati AF e BC. Il trapezio $ABQO$ ha gli angoli acuti di $60°$ e quindi $OQ = AB + 2 \cdot \frac{1}{2} OA = 40 + 20 = 60 \text{ cm} = 600 \text{ mm}$.

2. NEL CERCHIO [800]



ABC è un quarto di circonferenza inscritto in una circonferenza, quindi è possibile ottenere $ABCD$ un quadrato che lo contiene, il cui quarto vertice deve stare anch'esso sulla circonferenza.
$OC = 20\sqrt{2}$ è il raggio della circonferenza grande:

$$A_{grigia} = A_{CERCHIO} - 2 \cdot A_{BCB} - A_{SEMICERCHIO} = 800\pi - 2 \cdot \left(A_{semicerchio\ OCB} - A_{BOC}\right) - 400\pi =$$
$$= 800\pi - 2 \cdot (200\pi - 400) - 400\pi = 800 \text{ cm}^2$$

3 CIOCCOLATINI [22]

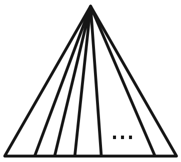
Siano n i cioccolatini al latte. La probabilità di estrarne tre di seguito è $\frac{n}{n+10} \cdot \frac{n-1}{n+10-1} \cdot \frac{n-2}{n+10-2} = \frac{1}{7}$.
Risolviamo l'equazione appena scritta: $7n(n-1)(n-2) = (n+10)(n+9)(n+8)$, che semplificata diventa $6n^3 - 48n^2 - 228n - 720 = 0$ Siccome ci aspettiamo una soluzione intera, cerchiamo tra i divisori di 720.
L'unica soluzione è $n = 12$.
Il numero di cioccolatini nella scatole è 22.

4. TORTE [3600]

Il rapporto tra i diametri è 2 e 3. Lo zucchero segue la proporzione tra i volumi che è $2^3 = 8$ e $3^3 = 27$.
Per l'intera torta servono $100 + 800 + 2700 = 3600 \text{ g}$ di zucchero.

5. CONTEGGIO 1 [5313] e
6. CONTEGGIO 2 [2023]

Risolviamo un problema preliminare.
Sia dato un triangolo con n segmenti che uniscono il vertice alla sua base.



Il numero dei triangoli visibili è $\binom{n+2}{2}$ in quanto un triangolino è identificato da due elementi scelti tra gli n segmenti e i due lati del triangolo.

Nel primo dei due problemi, abbiamo 21 triangoli diversi (il triangolo iniziale più qualche trapezio), ciascuno con 21 segmenti. Il numero di triangoli visibili è $21 \cdot \binom{23}{2} = 5313$.

Nel secondo problema, il triangolo ha 21 segmenti $\binom{23}{2}$ triangolini visibili;

il primo trapezio ci porta ad un triangolo con 20 segmenti $\binom{22}{2}$ triangolini visibili;

il secondo trapezio ad un triangolo con 19 segmenti $\binom{21}{2}$ triangolini visibili… e via di seguito, fino

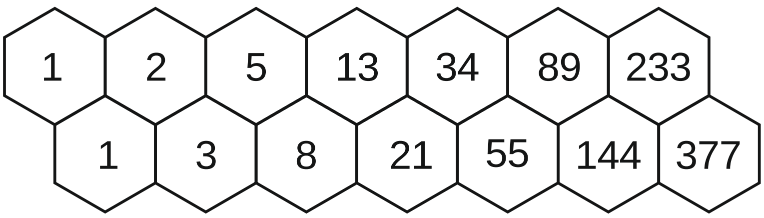
all'ultimo trapezio che ha 1 solo segmento e quindi $\binom{3}{2}$ triangolini visibili.

La soluzione del problema 2 è: $\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{23}{2}=\binom{24}{3}-1=2023$, dove nel calcolo è stata usata la

regola della mazza del triangolo di tartaglia senza il valore $\binom{2}{2}=1$.

7. REGALI PER TUTTI [8]
Siano x gli amici di Andrea. Ciascuno porta x regali, $(x-1)$ per gli altri amici più il regalo per Andrea, per un totale di x^2 regali.
Andrea ha $2x$ regali, due per ciascun amico.
$x^2+2x=80$, che possiamo facilmente risolvere con la formula risolutiva, oppure osservando che
$x^2+2x+1=81$, cioè $(x+1)^2=9^2$ e quindi $x=8$.

8 ANDAR DA A VERSO B. [377]
Scriviamo direttamente sulle celle il numero dei percorsi possibili:



Osserviamo che nelle celle sono comparsi i numeri di Fibonacci.

9. PROGRESSIONI GEOMETRICHE E AFFINI [750]

Sia $H=\sum_{i=0}^{+\infty} i\cdot q^i = 0\cdot q^0 + 1\cdot q^1 + 2\cdot q^2 + 3\cdot q^3 + \ldots$

Calcoliamo $qH = q^2 + 2\cdot q^3 + 3\cdot q^4 + \ldots$ e sottraiamo la seconda dalla prima:

$H - qH = q + q^2 + q^3 + \ldots$. Raccogliendo q a fattor comune otteniamo una progressione geometrica che sappiamo calcolare.

$H(1-q) = q(1+q+q^2+\ldots) = q\cdot\frac{1}{1-q}$.

Abbiamo dunque che $H = q\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$. La soluzione richiesta è $1000H = 1000\cdot\frac{3}{4} = 750$.

10. UN SOMMA SECOLARE [1012]

Osserviamo che la differenza della somma delle cifre di due numeri consecutivi, il primo pari ed il secondo dispari fa banalmente 1. Il risultato cercato è pari al numero di coppie di numeri considerati e quindi $\frac{2024}{2} = 1012$.

11. QUADRATI SPECIALI [88]

I numeri del tipo $\overline{aabb}$ possono essere scritti anche $1100\cdot a + 11\cdot b = 11(100a+b)$.

Dovendo essere un quadrato, il numero dovrà necessariamente essere multiplo di 11^2 e di un altro quadrato.

$121\cdot 1^2 = 121$ troppo piccolo	$121\cdot 4^2 = 1936$ no	$121\cdot 7^2 = 5929$ no
$121\cdot 2^2 = 484$ troppo piccolo	$121\cdot 5^2 = 3025$ no	$121\cdot 8^2 = 7744$ SI
$121\cdot 3^2 = 1089$ no	$121\cdot 6^2 = 4356$ no	$121\cdot 9^2 = 9801$ no

C'è un solo numero che verifica la condizione richiesta.

La soluzione è $\sqrt{11^2\cdot 8^2} = 88$.

12. UNA FUNZIONE INCOGNITA [5080]

Osserviamo che la funzione, per verificare la relazione, può avere al massimo grado 2. Cerchiamo una funzione nella forma $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$a(x+3)^2 + b(x+3) + c - 2(ax^2+bx+c) = x^2$ cioè: $(-a-1)x^2 + (6a-b)x + 3b - c + 9a = 0$

Da cui si ricava $a=-1$, $b=-6$ e $c=-27$.

$f(x) = -x^2 - 6x - 27$

$f(1)\cdot f(2) + f(3)\cdot f(4) = (-34)\cdot(-43) + (-54)\cdot(-67) = 5080$

13. ORDINE SUPERIORE [119]

Scelgo i 7 numeri tra i 10 a disposizione da posizionare nei primi sette posti. L'unica scelta vietata, per la seconda condizione del problema, è di prendere esattamente i numeri da 1 a 7.

La soluzione è $\binom{10}{7} - 1 = 120 - 1 = 119$.

14. UNA SOMMA PAZZESCA [99]

Il denominatore della frazione può essere scritto $k^2 - 100k + 5000 = (k-50)^2 + 2500$, e quindi è lo stesso per ogni coppia k, $100-k$. Eseguiamo la somma tra questi due valori:

$$\frac{k^2}{(k-50)^2+2500} + \frac{(100-k)^2}{(100-k-50)^2+2500} = \frac{k^2}{(k-50)^2+2500} + \frac{k^2-200k+10000}{(50-k)^2+2500} = \frac{2(\cancel{k^2-100k+5000})}{\cancel{k^2-100k+5000}} = 2$$

Abbiamo scoperto che per ogni coppia di valori otteniamo come soluzione sempre 2.

Controlliamo il valore centrale: $a_{50} = \frac{50^2}{2500} = 1$. La somma richiesta vale $48\cdot 2 + 1 = 99$.

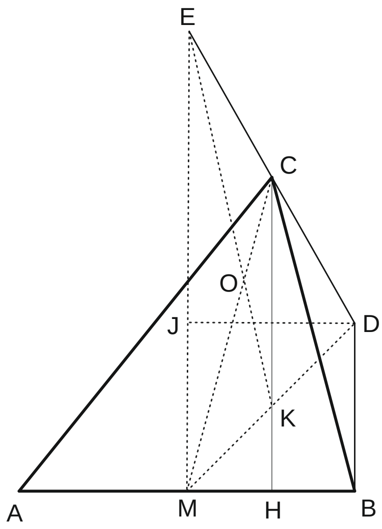
15. QUATERNE DI VICINI [6631]

Tra le $\binom{90}{4}$ possibili quaterne, contiamo quelle che non hanno numeri consecutivi:

consideriamo la sequenza $X \bigcirc X \bigcirc X \bigcirc X$, e immaginiamo di inserire altri 83 distanziatori in modo da leggere i 4 numeri scelti nella sequenza $1-2-3-4-5-...-90$, dove X rappresenta il numero scelto e $\bigcirc$ un numero non scelto. Usando le combinazioni con ripetizione otteniamo: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=83$ e quindi $\binom{83+5-1}{83}=\binom{87}{83}$.

La probabilità cercata è $P=1-\frac{\binom{87}{83}}{\binom{90}{4}}=\frac{757}{5874}$

16. TRIANGOLO 1 [5464]



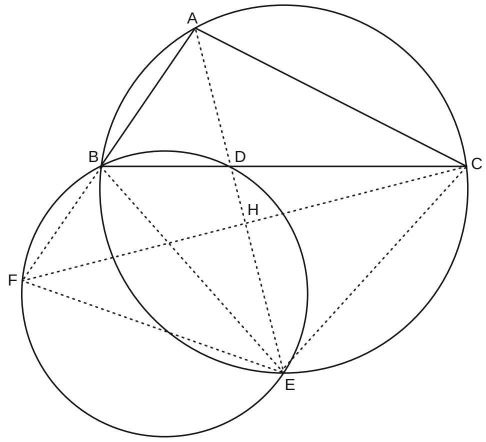
Tracciamo il segmento EM, che per Talete risulta essere parallelo a DB.
Osserviamo che O risulta essere il baricentro del triangolo EMD e quindi $OM=\frac{2}{3}CM$.
Completiamo il quadrato individuando il punto J su EM.
Il triangolo EJD è un triangolo $30°-60°-90°$.
$EM=EJ+JM=3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ cm; $MD=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$ cm.
$CH=\frac{DB+EM}{2}=\frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{2}$ in quanto segmento che unisce i punti medi del trapezio $EDBM$
Determiniamo la lunghezza del segmento CM sfruttando il Teorema di Pitagora sul triangolo CHM:

$$CM^2=CH^2+MH^2=\frac{54+72+72\sqrt{3}}{4}+\frac{18}{4}=36+18\sqrt{3}=\left(3\sqrt{3}+3\right)^2$$

$CM=3\sqrt{3}+3$ cm.

La soluzione è $1000\cdot OM=1000\cdot\frac{2}{3}CM=2000\left(\sqrt{3}+1\right)\cong 5464,2$.

17. TRIANGOLO 2 [30]



Riferendoci alla figura a fianco: sia $\alpha=B\hat{A}D=D\hat{A}C$ e $\beta=A\hat{C}B$.
$BE=EC$ perché corde della prima circonferenza viste da angoli uguali. $A\hat{D}C=180°-\alpha-\beta=B\hat{D}E$. $B\hat{F}E=\alpha+\beta$ in quanto $BFED$ è un quadrilatero ciclico. Siccome $A\hat{B}D=180-2\alpha-\beta$ e $C\hat{B}E=\alpha$ (angoli alla circonferenza), l'angolo $F\hat{B}E=\alpha+\beta$.
Il triangolo BFE è isoscele, quindi $FE=BE$.
Il triangolo FEC risulta essere isoscele.
AE risulta essere la bisettrice del triangolo, infatti $F\hat{E}A=180-2\alpha-\beta=A\hat{E}C$. $EH\perp FC$.
$FC=2\cdot HC=2\cdot AC\cdot\operatorname{sen}\alpha$.

Per il Teorema del Coseno applicato al triangolo ABC si ha $\cos 2\alpha=-\frac{1}{8}$ che possiamo trasformare in $1-2\operatorname{sen}^2\alpha=-\frac{1}{8}$, cioè $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{4}$.

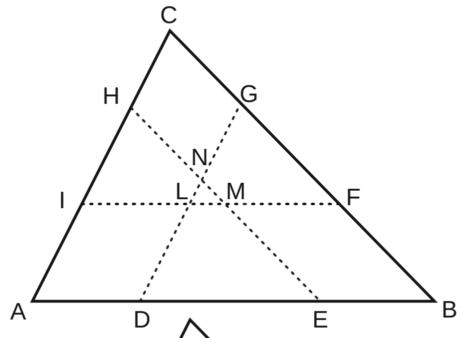
$FC=2\cdot 20\cdot\frac{3}{4}=30$ cm.

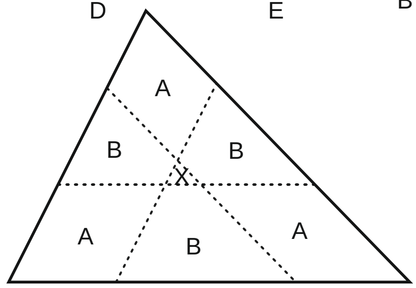
18. TRIANGOLO 3 [67]

Il triangolo rimane diviso in 7 zone. Osserviamo che i tre 3 parallelogrammi e i tre trapezi sono tra loro equivalenti.

I triangoli AHE e DGB sono simili, in quanto hanno gli stessi angoli, e sono equivalenti per ipotesi, e quindi congruenti. Da ciò si ha che $AD = EB$. Siccome EF è parallelo ad AI (perché anche AEH è congruente ad IFC), si ha che $LF = DE$.

Sia per comodità $AD = EB = a$; $DE = b$ e $LM = x$, A l'area dei parallelogrammi, B l'area dei trapezi e X l'area del triangolino c he si forma al centro.





Sappiamo che $\left(\frac{2a+b}{2a+x}\right)^2 = 2$ in quanto $2a+b$ è la base del triangolo ABC e $2a+x$ è la base del triangolo CIF.

Da qua, facendo la radice ed eseguendo i calcoli si ottiene che $b = \sqrt{2}a$, ma $2a+b = l$ (dove l è uno qualunque dei lati assegnati) e quindi $a = \frac{l}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$ e $b = \frac{l}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Siccome $b = a + x$, possiamo determinare $x = b - a = \frac{l}{2}\left(3\sqrt{2}-4\right)$.

Infine

$$\frac{A_{ABC}}{X} = \left(\frac{l}{\frac{l}{2}(3\sqrt{2}-4)}\right)^2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}-4}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot\left(3\sqrt{2}+4\right)}{\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3\sqrt{2}+4\right)}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot\left(3\sqrt{2}+4\right)}{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}+4\right)^2 = 34+24\sqrt{2} \cong 67{,}94\cdot$$

19. POLINOMIO IN INCOGNITO[2664]

Siano u, v e w le tre radici del polinomio. Per le formule di Viete, sappiamo che $999\frac{b}{a} = 999\frac{uvw}{uw+vw+wu} = 999\frac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}} \underset{(*)}{\le} 999\frac{u+v+w}{9} = 111\cdot 24 = 2664$, dove in (*) abbiamo usato la disuguaglianza tra le medie aritmetica e armonica.

20. UN GIOCO DI PAROLE [4030]

Detta x l'età di Andrea e y quella di Luigi, la loro differenza di età risulta essere $x-y$, quindi il problema è risolto dal sistema:

$$\begin{cases} x = 2(y-(x-y)) \\ x+(x+(x-y)) = 90 \end{cases}$$

che traduce le due affermazioni degli amici.

Risolvendo si trova $x = 40$ e $y = 30$.

La risposta richiesta è 4030.